

RANCANG BANGUN PROGRAM PENGEDITAN KURVA B-SPLINE MULTIRESOLUSI BERBASIS WAVELETS

Nanik Suciati, Jurusan Teknik Informatika, FTIF, ITS
L.Y. Stefanus, Fakultas Ilmu Komputer, UI

Email : nanik@its-sby.edu

ABSTRAK

Penelitian ini menyusun representasi multiresolusi untuk kurva B-spline kubik yang menginterpolasi titik-titik ujung dengan basis wavelets. Representasi multiresolusi ini digunakan untuk mendukung beberapa tipe pengeditan kurva, yaitu penghalusan kurva dengan tingkat resolusi kontinyu untuk menghilangkan detail-detail kurva yang tidak diinginkan, pengeditan bentuk keseluruhan kurva dengan tetap mempertahankan detail-detailnya, perubahan detail-detail kurva tanpa mempengaruhi bentuk keseluruhannya, dan pengeditan satu bagian tertentu dari kurva melalui manipulasi secara langsung terhadap titik-titik kontrolnya. Untuk menguji kemampuan representasi multiresolusi dalam mendukung empat tipe manipulasi kurva tersebut, disusun program pengeditan kurva dengan menggunakan bahasa pemrograman Visual C++ pada komputer Pentium 133 MHz, memori 16 Mbyte, sistem operasi Windows 95, lingkungan pengembangan Microsoft Development Studio 97 dan pustaka Microsoft Foundation Class. Dari hasil uji coba program diketahui bahwa representasi multiresolusi memberikan dukungan yang sangat baik terhadap tipe-tipe pengeditan seperti yang disebutkan di atas. Representasi multiresolusi tidak membutuhkan memori penyimpanan ekstra selain dari yang digunakan untuk menyimpan titik kontrol. Dari hasil uji coba program menggunakan ratusan titik kontrol, algoritma berjalan cukup cepat dan memadai berkaitan dengan tuntutan komunikasi interaktif antara user dan program.

Kata kunci : B-Spline, Wavelet, Multiresolusi.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konstruksi dan manipulasi kurva merupakan salah satu bidang utama dalam grafika komputer. Kurva dimanfaatkan untuk memodelkan obyek-obyek dalam dunia nyata yang berbentuk tak beraturan tetapi mulus [BAR87]. Untuk merepresentasikan kurva biasanya digunakan *spline*, yaitu suatu fungsi yang terdiri dari beberapa potongan fungsi polinomial yang digabung menjadi satu. Jika fungsi polinomial yang digunakan berderajat satu, maka akan menghasilkan kurva linier sepotong demi sepotong. Representasi kurva dengan menggunakan *spline* berderajat satu ini memerlukan penyimpanan sejumlah besar koordinat titik supaya didapatkan bentuk yang cukup akurat. Selain itu, manipulasi interaktif sulit dilakukan. Pendekatan yang lebih umum adalah menggunakan *spline* berderajat lebih tinggi dari satu karena membutuhkan penyimpanan koordinat titik yang lebih sedikit dan memudahkan manipulasi interaktif [FOL90].

Paradigma umum dalam pengeditan kurva menyatakan bahwa manipulasi kurva seharusnya bisa dilakukan secara langsung dalam suatu lingkungan pengeditan interaktif [SCH95]. Program-program *drawing* biasanya menyediakan operasi-operasi primitif untuk menggambar kurva *B-spline*. Demikian

juga dengan paket *Computer Aided Design* (CAD), umumnya menyediakan alat-alat untuk merancang kurva dan permukaan. Untuk mendapatkan bentuk yang diinginkan, *user* memindahkan titik-titik kontrol dengan bantuan *mouse*. Suatu representasi kurva yang baik seharusnya memungkinkan pengeditan, penghalusan dan aproksimasi kurva yang fleksibel. Suatu representasi kurva seharusnya mendukung hal-hal sebagai berikut [FIN96]:

- kemampuan mengubah bentuk keseluruhan dari suatu kurva dengan tetap mempertahankan detail-detail halusanya,
- kemampuan mengubah detail-detail kurva tanpa mempengaruhi bentuk keseluruhannya,
- kemampuan mengedit kurva yang memungkinkan satu bagian tertentu dari kurva diubah melalui manipulasi secara langsung terhadap titik-titik kontrolnya,
- kemampuan melakukan tingkat penghalusan kontinyu, yang dapat menghilangkan detail-detail yang tidak diinginkan dari suatu kurva.

Forsey dan Bartels [FOR88] menyusun suatu '*hierarchical B-spline*' untuk mengatasi masalah a) di atas, yaitu pengeditan bentuk keseluruhan dari suatu permukaan dengan tetap mempertahankan detailnya. Mereka merepresentasikan kurva yang sama pada beberapa tingkat resolusi melalui penyusunan himpunan titik kontrol yang sesuai pada setiap tingkat

resolusi. Mereka mendeskripsikan suatu metode untuk mengaproksimasi secara rekursif suatu representasi kurva hirarkhis ke dalam sekumpulan data, dengan aproksimasi pertama adalah aproksimasi paling kasar dan selanjutnya memperhalus aproksimasi tersebut. Representasi yang disusun oleh Forsey dan Bartels ini tidak berkaitan dengan suatu fungsi basis tertentu, sehingga untuk satu bentuk kurva tidak dijamin adanya representasi hirarkhis yang unik. Konstruksi ini mirip dengan ide proses *filter bank* yang digunakan dalam analisa multiresolusi. Tetapi ada satu perbedaan penting. Jika representasi hirarkhis dari suatu kurva disusun menggunakan formulasi Forsey dan Bartels, maka akan terdapat sejumlah tak berhingga representasi yang mungkin untuk kurva yang sama. Sementara itu, jika representasi hirarkhis dari suatu kurva disusun menggunakan proses *filter bank* seperti dalam analisa multiresolusi, maka representasi yang dihasilkan adalah unik [FIN96].

Wavelet merupakan alat matematis yang dapat digunakan untuk menyusun analisa multiresolusi [MAL89]. Analisa multi-resolusi memungkinkan analisa terhadap suatu fungsi pada beberapa tingkat resolusi. Kurva yang diekspresikan dengan m titik kontrol dapat diaproksimasi ke dalam tingkat resolusi yang lebih rendah dengan n titik kontrol, melalui proses *filtering*. Karena $m > n$, maka ada beberapa detail yang hilang selama proses *filtering*. Wavelet menam-pung detail-detail yang hilang selama proses *filtering* tersebut ke dalam d titik kontrol. Proses pemisahan kurva dengan m titik kontrol ke dalam kurva resolusi lebih rendah dengan n titik kontrol dan detail-detail d titik kontrol, disebut dekomposisi [FIN96]. Proses dekomposisi ini dilakukan secara rekursif untuk menghasilkan hirarki kurva multiresolusi.

1.2 Masalah

Dalam penelitian ini dibangun suatu sistem pengeditan kurva multiresolusi berbasis wavelet yang diharapkan dapat menyediakan suatu kerangka kerja yang mendukung empat sifat di atas (a-d). Yang menjadi permasalahan dalam tesis ini adalah:

- bagaimana menyusun representasi kurva multiresolusi berbasis wavelet
- bagaimana menyusun metode manipulasi kurva dengan memanfaatkan representasi kurva multiresolusi berbasis wavelet
- bagaimana membangun program dengan struktur data dan algoritma yang sesuai untuk manipulasi kurva multiresolusi berbasis wavelet.

1.3 Batasan Masalah

Representasi kurva dibatasi pada jenis kurva *B-spline* kubik yang menginterpolasi titik-titik ujung (untuk selanjutnya akan disebut kurva *B-spline KI*), yaitu kurva *B-spline* kubik seragam dengan *knot-knot* pada ujung kurva memiliki multiplisitas 4 [BAR87][FIN96]. Kurva *B-spline* kubik seragam adalah kurva yang dibentuk dengan menggunakan fungsi-fungsi basis yang berupa fungsi polinomial berderajat 3 dengan kontinuitas C^2 pada *joint* (titik temu antara dua segmen kurva yang berurutan) dan memiliki deretan *knot* berjarak sama.

Perangkat lunak dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman Visual C++ pada komputer Pentium 133 MHz, memori 16 Mbyte, sistem operasi Windows 95, lingkungan pengembangan Microsoft Development Studio 97 dan pustaka Microsoft Foundation Class.

2. REPRESENTASI KURVA B-SPLINE MULTIRESOLUSI BERBASIS WAVELET

Untuk membuat suatu kurva, titik-titik kontrol harus didefinisikan terlebih dahulu. Titik-titik kontrol inilah yang akan menentukan bentuk dari kurva. Dalam representasi multiresolusi, titik-titik kontrol dari kurva *B-spline* KI dimanipulasi sedemikian rupa dengan memanfaatkan fungsi basis *wavelets* sehingga membentuk hirarkhi titik kontrol. Pada setiap tingkat resolusi, himpunan titik kontrol mengaproksimasi bentuk kurva dengan tingkat kedekatan tertentu. Representasi multiresolusi ini disusun untuk mendukung empat sifat pengeditan kurva seperti yang disebutkan pada 1.1.

2.1 Gambaran Umum

Ruang *B-spline* kubik seragam dinyatakan dengan S dengan deretan *knot* $\bar{u}_i = i, i \in Z$, dan jarak antar *knot* sebesar 1. Notasi Z menyatakan himpunan bilangan integer positif. Dalam representasi multiresolusi, akan disusun ruang *B-spline* kubik seragam S^j dengan deretan *knot* berjarak 2^{-j} , $j \in Z$ [CHU92]. Indeks j dalam S^j menyatakan tingkat resolusi. Suatu kurva pada resolusi j dibentuk dengan menggunakan $2^j + 3$ titik kontrol. Dengan demikian kurva pada resolusi paling kasar, yaitu resolusi 0, dibentuk dengan menggunakan $2^0 + 3 = 4$ titik kontrol dan terdiri dari 1 segmen kurva serta memiliki deretan *knot* berjarak 1. Kurva pada tingkat resolusi 1 dibentuk dengan menggunakan $2^1 + 3 = 5$ titik kontrol dan terdiri dari 2 segmen kurva serta memiliki deretan *knot* berjarak $\frac{1}{2}$. Kurva pada tingkat resolusi 2

dibentuk dengan menggunakan $2^2 + 3 = 7$ titik kontrol dan terdiri dari 4 segmen kurva serta memiliki deretan *knot* berjarak $\frac{1}{4}$. Demikian seterusnya. Karena fungsi *B-spline* pada resolusi j_1 dengan deretan *knot* berjarak 2^{-j_1} juga merupakan fungsi *B-spline* pada resolusi j_2 dengan deretan *knot* 2^{-j_2} , dimana $j_1 < j_2$, maka terdapat deretan ruang bersarang sebagai berikut :

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots$$

Jika V^j menyatakan ruang $L^2(R)$ tertutup dari $S^j \cap L^2(R)$, maka terdapat subruang-subruang *B-spline* tertutup dan bersarang dari $L^2(R)$ sebagai berikut [CHU92] :

$$V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots$$

Pada setiap resolusi, kurva yang sama dinyatakan dengan titik-titik kontrol yang berbeda. Misalkan C^n adalah himpunan titik kontrol pada resolusi n yang dinyatakan dengan vektor kolom $[c_0^n, c_1^n, c_2^n, \dots, c_{m-1}^n]^T$. Jumlah titik kontrol yang terdapat dalam C^n adalah $2^n + 3 = m$. Untuk menyusun C^{n-1} (aproksimasi dari C^n dengan resolusi satu lebih rendah) yang memiliki jumlah titik kontrol $2^{n-1} + 3 = m'$ dengan $m' < m$, dilakukan *filtering* terhadap m titik kontrol dari C^n . Proses ini dapat diekspresikan menggunakan persamaan matriks sebagai berikut [FIN96] :

$$C^{n-1} = A^n C^n \quad (2.1)$$

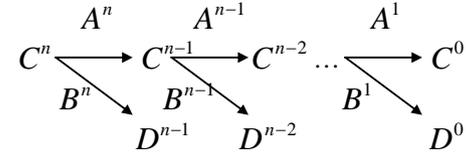
dengan A^n adalah matriks berukuran $m' \times m$.

Karena jumlah titik kontrol dalam C^{n-1} lebih sedikit dibanding jumlah titik kontrol dalam C^n , maka ada beberapa detail yang hilang selama proses pemfilteran. Detail-detail yang hilang ini ditampung dalam D^{n-1} yang dapat dihitung menggunakan persamaan matriks sebagai berikut [FIN96] :

$$D^{n-1} = B^n C^n \quad (2.2)$$

B^n adalah matriks berukuran $(m - m') \times m$. Pasangan matriks A^n dan B^n disebut filter analisis. Proses pemisahan C^n ke dalam versi resolusi lebih rendah C^{n-1} dan detail D^{n-1} disebut dekomposisi. Dan dekomposisi ini bisa dilakukan secara berulang terhadap C^{n-1} , sehingga titik kontrol semula C^n dapat diekspresikan sebagai hirarkhi dari titik-titik kontrol dengan resolusi lebih rendah C^0, C^1, \dots, C^{n-1} dan detail-detail D^0, D^1, \dots, D^{n-1} . Proses

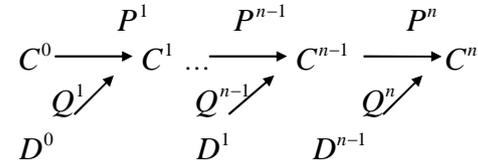
dekomposisi berulang ini dikenal sebagai *filter bank*, yang dapat digambarkan sebagai berikut :



Jika pasangan matriks A^n dan B^n dipilih dengan cermat, maka titik kontrol awal C^n dapat direkonstruksi kembali dari C^{n-1} dan D^{n-1} dengan menggunakan pasangan matriks P^n dan Q^n melalui persamaan berikut [FIN96] :

$$C^n = P^n C^{n-1} + Q^n D^{n-1} \quad (2.3)$$

Matriks P^n dan Q^n disebut filter sintesis. Proses rekonstruksi bisa dilihat pada gambar berikut :



Karena titik kontrol semula C^n dapat direkonstruksi dari deretan $C^0, D^0, D^1, \dots, D^{n-1}$, maka deretan $C^0, D^0, D^1, \dots, D^{n-1}$ dapat dianggap sebagai transformasi wavelets dari titik kontrol C^n . Agar dapat melakukan transformasi wavelets dibutuhkan pasangan filter analisis (A^n, B^n) dan filter sintesis (P^n, Q^n) yang sesuai. Beberapa hal yang perlu dilakukan untuk menyusun filter-filter tersebut adalah :

1. Pemilihan *scaling functions* $\Phi^j(u)$ yang merentang V^j untuk semua j dalam $[0, n]$. *Scaling functions* $\Phi^j(u)$ akan menentukan filter sintesis P^j .
2. Pemilihan *inner product* untuk dua fungsi f dan g dalam V^j , yang akan menentukan *norm* dari fungsi dan ruang komplemen orthogonal W^j dari V^j di dalam V^{j+1} .
3. Pemilihan wavelets $\Psi^j(u)$ yang merentang W^j . Wavelets $\Psi^j(u)$ akan menentukan filter sintesis Q^j . Filter-filter analisis A^j dan B^j dapat dihitung dengan menggunakan filter-filter sintesis P^j dan Q^j .

2.2 Penyusunan Filter Sintesis P^j

Penyusunan filter sintesis P^j sangat tergantung pada pemilihan *scaling functions* Φ^j . Dengan melihat *two scale relations* dari *scaling functions*, maka hubungan antara P^j dan Φ^j , dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Phi^{j-1} = \Phi^j P^j \quad (2.4)$$

Artinya, *scaling functions* harus bersifat *refinable*, sehingga setiap *scaling functions* pada tingkat resolusi $j-1$ harus dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari *scaling functions* (yang lebih halus) pada tingkat resolusi j , untuk semua j dalam $[1, n]$, dengan n menyatakan resolusi awal [FIN96].

Dalam penelitian ini, digunakan kurva *B-spline* KI, yaitu kurva yang disusun menggunakan fungsi basis *B-spline* KI. Bentuk dari kurva ditentukan oleh penjumlahan titik-titik kontrol yang dikalikan dengan fungsi basis *B-spline* KI. Dengan kata lain, kurva yang terbentuk merupakan kombinasi linier dari fungsi basis *B-spline* KI. Berdasarkan penjelasan pada 2.1, diketahui bahwa fungsi basis *B-spline* KI dapat menghasilkan subruang-subruang *B-spline* tertutup dan bersarang dari $L^2(R)$ sebagai berikut :

$$V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots$$

Dengan demikian, sesuai dengan definisi mengenai *scaling functions*, maka fungsi basis *B-spline* KI dapat digunakan sebagai *scaling functions*.

Jika kita memiliki himpunan titik kontrol $C^n = [c_0^n, c_1^n, c_2^n, \dots, c_{m-1}^n]^T$ pada resolusi n , dengan $m = 2^n + 3$, maka fungsi $f^n(u)$ yang menyatakan kurva *B-spline* KI, dengan $u \in [0, 1]$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$f^n(u) = \Phi^n(u) C^n$$

$\Phi^n(u)$ adalah matriks baris dengan elemen-elemen berupa *scaling functions*, yaitu :

$$\Phi^n(u) = [\phi_0^n(u), \phi_1^n(u), \dots, \phi_{m-1}^n(u)].$$

Jumlah *scaling functions* yang menyusun suatu kurva pada resolusi j sama dengan jumlah titik kontrol, yaitu $2^j + 3$. Pada tingkat resolusi 0, kurva memiliki $2^0 + 3 = 4$ *scaling functions*. Pada tingkat resolusi 1, kurva memiliki $2^1 + 3 = 5$ *scaling functions*, dan seterusnya. Penyusunan koefisien filter P^j yang menghubungkan antara *scaling functions* pada resolusi j dengan *scaling functions* pada resolusi $j-1$ analog dengan pencarian koefisien $\alpha_{i,k}(l)$ pada teorema berikut :

untuk setiap $i = 0, \dots, s$;

$$B_{i,k}(\bar{u}) = \sum_{l=0}^{s+n} \alpha_{i,k}(l) N_{l,k}(\bar{u}), \quad (2.5)$$

dengan $B_{i,k}(\bar{u})$ merupakan fungsi basis *B-spline* dengan jumlah *knot* $s+k+1$ (resolusi rendah), dan $N_{l,k}(\bar{u})$ merupakan fungsi basis *B-spline* dengan jumlah *knot* $s+n+k+1$ (resolusi tinggi) [FIN96]. Variabel s menyatakan indeks terakhir dari fungsi basis (dengan indeks pertama dimulai dari 0), variabel n menyatakan jumlah *knot-knot* baru yang disisipkan ke dalam barisan *knot* lama, dan k menyatakan orde dari *spline*. Karena yang digunakan adalah kurva *B-spline* kubik, maka $k=4$. Nilai dari koefisien $\alpha_{i,k}(l)$ memenuhi *recurrence* sebagai berikut:

$$\alpha_{i,1}(l) = \begin{cases} 1 & \bar{u}_i \leq \bar{w}_l < \bar{u}_{i+1} \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan

$$\alpha_{i,r}(l) = \frac{\bar{w}_{l+r-1} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{l+r-1} - \bar{u}_i} \alpha_{i,r-1}(l) + \frac{\bar{u}_{i+r} - \bar{w}_{l+r-1}}{\bar{u}_{i+r} - \bar{u}_{i+1}} \alpha_{i+1,r-1}(l)$$

untuk $r = 2, 3$ dan 4.

Filter sintesis P^j dapat dihitung dengan mencari nilai $\alpha_{i,k}(l)$ melalui penyisipan deretan *knot* baru di tengah deretan *knot* lama, sehingga jarak antara deretan *knot* baru menjadi setengah dari jarak deretan antara *knot* lama. Untuk menghitung nilai $\alpha_{i,k}(l)$, yang diperlukan hanya informasi tentang barisan *knot* pada resolusi $j-1$ dan barisan *knot* pada resolusi j . Hasil akhir dari $\alpha_{i,k}(l)$ berupa matriks berukuran (jumlah *scaling functions* pada resolusi $j-1$) \times (jumlah *scaling functions* pada resolusi j) atau $(2^{j-1} + 3) \times (2^j + 3)$. Matriks P^j merupakan transpose dari matriks $\alpha_{i,k}(l)$, karena posisi *scaling functions* pada persamaan (2.4) dan (2.5) berbalikan. Hasil perhitungan filter analisis P^1, P^2 dan $P^{j \geq 3}$, bisa dilihat di lampiran.

2.3 Penyusunan Filter Sintesis Q^j

Pemilihan *scaling functions* $\Phi^j(u)$ untuk semua $j \in \mathbb{Z}$ dan $j \geq 0$ yang merentang V^j dan menentukan filter sintesis P^j telah dibahas dalam 2.2. Langkah selanjutnya dalam menyusun representasi multiresolusi adalah mendefinisikan ruang W^j yang merupakan ruang komplemen orthogonal dari V^j di dalam V^{j+1} . Wavelets adalah fungsi-fungsi yang dipilih sebagai basis dari W^j .

Sebagaimana halnya *scaling functions* yang pada 2.2 ditulis dalam bentuk matriks baris, sebagai berikut :

$$\Phi^j(u) = [\phi_0^j(u), \phi_1^j(u), \dots, \phi_{m-1}^j(u)],$$

maka wavelets juga ditulis sebagai berikut :

$$\Psi^j(u) = [\psi_0^j(u), \psi_1^j(u), \dots, \psi_{n-1}^j(u)].$$

Jumlah *scaling functions* pada resolusi j adalah $2^j + 3 = m$, dan jumlah wavelets pada resolusi j adalah $2^j = n$. Karena W^j adalah ruang komplemen orthogonal dari V^j di dalam V^{j+1} , maka jumlah *scaling functions* pada resolusi $j+1$ adalah $m + n = 2^{j+1} + 3$.

Pemilihan *inner product* untuk dua fungsi f dan g dalam V^j akan menentukan ruang komplemen orthogonal W^j dari V^j di dalam V^{j+1} [FIN96]. *Inner product* standar yang digunakan adalah

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(u)g(u)du. \quad (2.6)$$

Wavelets $\Psi^{j-1}(u)$ yang merentang W^{j-1} dipilih dengan batasan sebagai berikut :

1. Setiap wavelets dalam $\Psi^{j-1}(u)$ orthogonal dengan setiap *scaling functions* dalam $\Phi^{j-1}(u)$, sehingga $\langle \phi_k^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle = 0$ untuk semua k dan l .
2. Wavelets memiliki dukungan paling kecil (*minimal support*), sehingga dipilih barisan koefisien wavelets yang memiliki nilai 0 paling banyak (tetapi tidak semuanya 0).

Notasi $\left[\langle \Phi^{j-1} | \Psi^{j-1} \rangle \right]$ didefinisikan sebagai matriks *inner product* dengan setiap elemen (k,l) adalah $\langle \phi_k^{j-1}, \psi_l^{j-1} \rangle$. Berkaitan dengan batasan orthogonalitas, maka :

$$\left[\langle \Phi^{j-1} | \Psi^{j-1} \rangle \right] = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Dengan menggunakan wavelets $\Psi^{j-1}(u)$ yang merentang ruang W^{j-1} , filter sintesis Q^j dapat ditentukan melalui persamaan matriks yang identik dengan *two scale relations* dari wavelets sebagai berikut:

$$\Psi^{j-1} = \Phi^j Q^j. \quad (2.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.7) didapat :

$$\left[\langle \Phi^{j-1} | \Phi^j \rangle \right] Q^j = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Persamaan matriks dengan sisi kanan 0 seperti pada (2.9) disebut sistem persamaan homogen. Himpunan semua solusi yang mungkin disebut ruang *null* dari

$$\left[\langle \Phi^{j-1} | \Phi^j \rangle \right],$$

dan kolom-kolom dari matriks Q^j harus membentuk basis untuk ruang *null* ini. Ada banyak kemungkinan basis untuk ruang *null*. Artinya, terdapat beberapa basis wavelets yang berbeda untuk suatu ruang wavelets W^{j-1} . Oleh karena itu diperlukan batasan lain untuk memilih basis wavelets. Dalam penelitian ini, dipilih basis wavelets yang memiliki dukungan paling kecil.

Hasil perhitungan filter sintesis Q , *scaling function* pada resolusi 1, wavelets pada resolusi 1, dan *scaling function* pada resolusi 2, bisa dilihat di gambar 1.

2.4 Penyusunan Filter Analisis A^j dan B^j

Penyusunan filter-filter analisis A^j dan B^j dapat dilakukan dengan menggunakan filter-filter sintesis P^j dan Q^j sebagai berikut :

$$\left[\Phi^{j-1} | \Psi^{j-1} \right] = \Phi^j \left[P^j | Q^j \right]. \quad (2.10)$$

Berdasarkan definisi dari relasi dekomposisi, maka hubungan antara filter analisis A^j dan B^j dengan *scaling functions* dan *wavelets* dapat ditulis sebagai berikut :

$$\left[\Phi^{j-1} | \Psi^{j-1} \right] \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} = \Phi^j. \quad (2.11)$$

Selanjutnya, filter A^j dan B^j disusun melalui perhitungan matriks yang memenuhi relasi invers sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} = \left[P^j | Q^j \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Setelah filter-filter sintesis dan analisis ditentukan, maka representasi multiresolusi dari kurva *B-spline* KI dapat dihitung.

2.5 Metode-Metode Manipulasi pada Kurva Multiresolusi

Subbab ini membahas tentang beberapa metode manipulasi kurva dengan memanfaatkan representasi multiresolusi dari kurva *B-spline* KI, sehingga mendukung empat sifat pengeditan kurva seperti yang telah disebutkan di 1.1. Pembahasan dibagi menjadi tiga bagian, yaitu penghalusan, pengeditan bentuk keseluruhan kurva dan pengeditan detail-detail kurva.

2.5.1 Penghalusan

Subbab ini membahas tentang metode penghalusan kurva. Yang dimaksud dengan penghalusan adalah: untuk suatu kurva pada resolusi n yang dibentuk dengan $m = 2^n + 3$ buah titik kontrol C^n , kita bisa menghaluskan bentuk kurva dengan menghilangkan detail-detail yang tidak diinginkan dengan melakukan aproksimasi terhadap kurva semula (resolusi n) pada resolusi j , dengan $0 \leq j < n$, menggunakan $m' = 2^j + 3$ buah titik kontrol C^j . Kebutuhan implisit yang lain dari penghalusan adalah kemampuan untuk merepresentasikan kurva pada resolusi n dengan kurva yang sama pada resolusi k (yang lebih tinggi) dengan $k > n$, menggunakan $m'' = 2^k + 3$ titik kontrol C^k . Tipe penghalusan semacam ini dibutuhkan ketika kita ingin mengedit segmen kurva yang lebarnya lebih kecil dari segmen kurva pada tingkat resolusi n (lihat gambar 3).

Penyusunan kurva pada tingkat resolusi lebih rendah dari n dapat dilakukan dengan menghitung C^j sebagai berikut [FIN96] :

$$C^j = A^{j+1} A^{j+2} \dots A^n C^n .$$

Jadi, persamaan dekomposisi (2.1) dikerjakan sampai ditemukan titik-titik kontrol pada resolusi yang diinginkan.

Penyusunan kurva pada tingkat resolusi lebih tinggi dari n dapat dilakukan dengan menghitung C^k sebagai berikut :

$$C^k = P^k \dots P^{n+2} P^{n+1} C^n \quad (2.13)$$

Jadi, persamaan rekonstruksi (2.3) dikerjakan dengan nilai D^l , $n < l \leq k$ sama dengan $\mathbf{0}$. Proses ini sama dengan melakukan penyisipan deretan knot baru di tengah deretan knot lama, setiap kali tingkat resolusi bertambah 1. Algoritma ini dijalankan sampai ditemukan titik-titik kontrol pada resolusi yang diinginkan.

Setelah titik kontrol pada tingkat resolusi tertentu ditemukan, maka kurva *B-spline* KI bisa digambar dengan menggunakan fungsi basis *B-spline* KI (*scaling functions*) sebagai berikut :

$$f^k(u) = \Phi^k(u) C^k .$$

Dengan representasi kurva multi-resolusi, kita hanya dapat menghitung aproksimasi kurva pada resolusi-resolusi diskrit. Jadi, jika j menyatakan resolusi, maka nilai j harus integer positif. Karena pada resolusi j jumlah titik kontrol adalah $2^j + 3$, maka aproksimasi kurva hanya dapat disusun dengan jumlah titik kontrol 4, 5, 7, 11, 19, 32 dan seterusnya. Pada resolusi tinggi, perbedaan jumlah titik kontrol pada resolusi j dengan aproksimasinya pada resolusi $j-1$ menjadi semakin besar, sehingga detail-detail yang masih ingin dipertahankan dari kurva asli kemungkinan hilang pada kurva aproksimasi. Untuk mengantisipasi hal ini, didefinisikan resolusi kontinu n . Jika $n=j$ (n bernilai integer positif), maka kurva $f^j(u)$ dibentuk menggunakan $2^j + 3$ titik kontrol yang disusun melalui representasi multiresolusi. Jika $n=j+\alpha$ dengan $0 < \alpha < 1$ (n bernilai pecahan positif), maka kurva $f^{j+\alpha}(u)$ dibentuk menggunakan interpolasi linier antara kurva $f^j(u)$ (pada resolusi j) dengan kurva $f^{j+1}(u)$ (pada resolusi $j+1$), sebagai berikut [FIN96] :

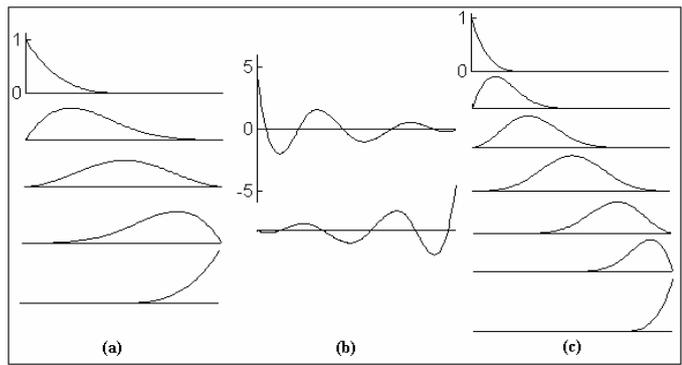
$$\begin{aligned} f^{j+\alpha}(u) &= (1-\alpha)f^j(u) + \alpha f^{j+1}(u) \\ &= (1-\alpha)\Phi^j(u)C^j + \alpha\Phi^{j+1}(u)C^{j+1} . \end{aligned}$$

Beberapa contoh penghalusan kurva bisa dilihat di gambar 2.

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad P^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad P^{j \geq 3} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 12 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 11 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & \dots \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \sqrt{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q^2 = \sqrt{\frac{315}{31196288}} \begin{bmatrix} 1368 & 0 \\ -2064 & -240 \\ 1793 & 691 \\ -1053 & -1053 \\ 691 & 1793 \\ -240 & -2064 \\ 0 & 1368 \end{bmatrix} \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 6.311454 & 0 & 0 & 0 \\ -9.189342 & -1.543996 & 0 & 0 \\ 7.334627 & 4.226722 & 0.087556 & 0 \\ -3.514553 & -5.585477 & -0.473604 & -0.000155 \\ 1.271268 & 6.059557 & 1.903267 & 0.019190 \\ -0.259914 & -4.367454 & -4.367454 & -0.259914 \\ 0.019190 & 1.903267 & 6.059557 & 1.271268 \\ -0.000155 & -0.473604 & -5.585477 & -3.514553 \\ 0 & 0.087556 & 4.226722 & 7.334627 \\ 0 & 0 & -1.543996 & -9.189342 \\ 0 & 0 & 0 & 6.311454 \end{bmatrix}$$

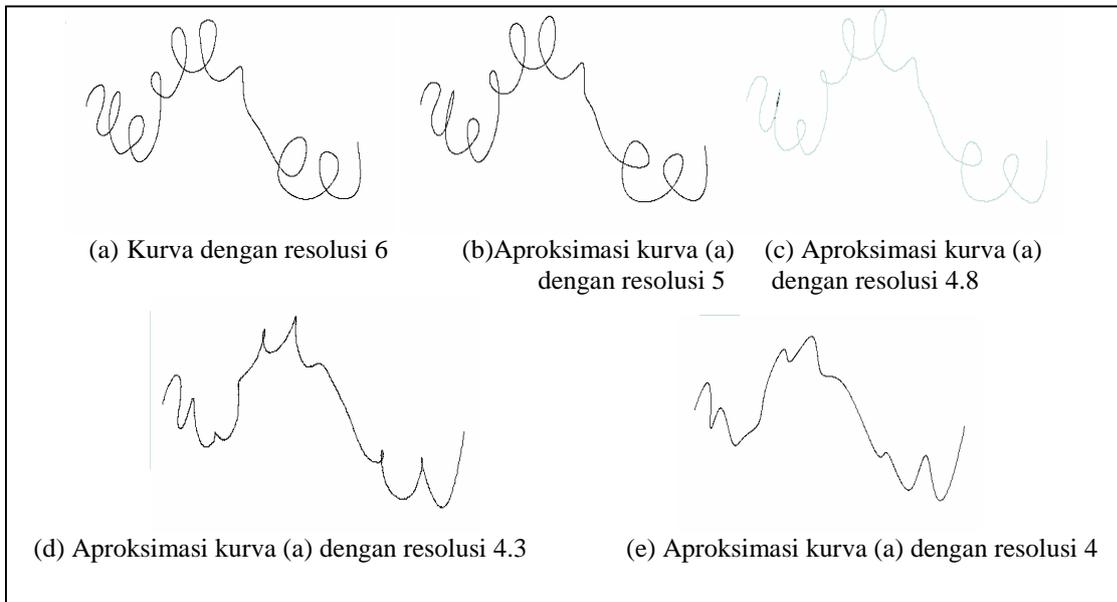
$$Q^{j \geq 4} = \sqrt{\frac{5 \times 2^j}{675221664}} \begin{bmatrix} 25931.200710 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -37755.271723 & -6369.305453 & 0 & 0 & \dots \\ 30135.003012 & 17429.266054 & 385.797044 & 0 & \dots \\ -14439.86935 & -23004.252368 & -2086.545605 & -1 & \dots \\ 5223.125428 & 24848.487871 & 8349.373420 & 124 & \dots \\ -1067.879425 & -17678.884301 & -18743.473059 & -1677 & \dots \\ 78.842887 & 7394.685374 & 24291.795239 & 7904 & \dots \\ -0.635830 & -1561.868558 & -18420.997597 & -18482 & \dots \\ 0 & 115.466347 & 7866.732009 & 24264 & \dots \\ 0 & -0.931180 & -1668.615872 & -18482 & \dots \\ 0 & 0 & 123.378671 & 7904 & \dots \\ 0 & 0 & -0.994989 & -1677 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 124 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \end{bmatrix}$$



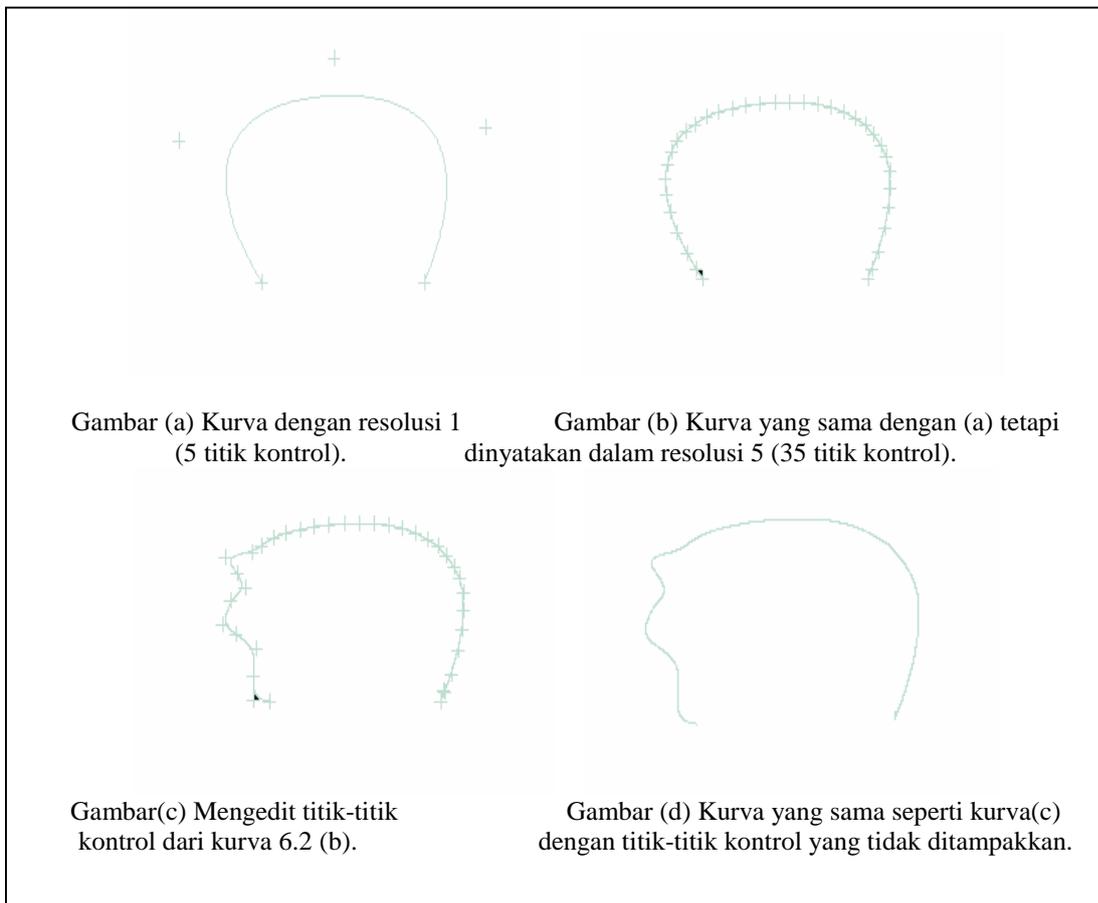
Gambar 1. Hasil perhitungan filter P dan Q. (a) *Scaling functions* pada resolusi 1. Dari atas ke bawah berturut-turut $\phi_0^1, \phi_1^1, \phi_2^1, \phi_3^1, \phi_4^1$. (b) *Wavelets* pada resolusi 1. Dari atas ke bawah berturut-turut ψ_0^1, ψ_1^1 . (c) *Scaling functions* pada resolusi 2. Dari atas ke bawah berturut-turut $\phi_0^2, \phi_1^2, \phi_2^2, \phi_3^2, \phi_4^2, \phi_5^2, \phi_6^2$.

titik kontrol \bar{C}^j , dimana $\bar{C}^j = C^j + \Delta C^j$. Pengeditan titik kontrol pada resolusi j akan mempengaruhi (mengubah) titik kontrol pada resolusi yang lebih tinggi, tetapi perubahan tersebut diusahakan untuk tidak mempengaruhi (mengubah) deretan detail D^0, D^1, \dots, D^{n-1} . Hal inilah yang menyebabkan bentuk kurva secara keseluruhan

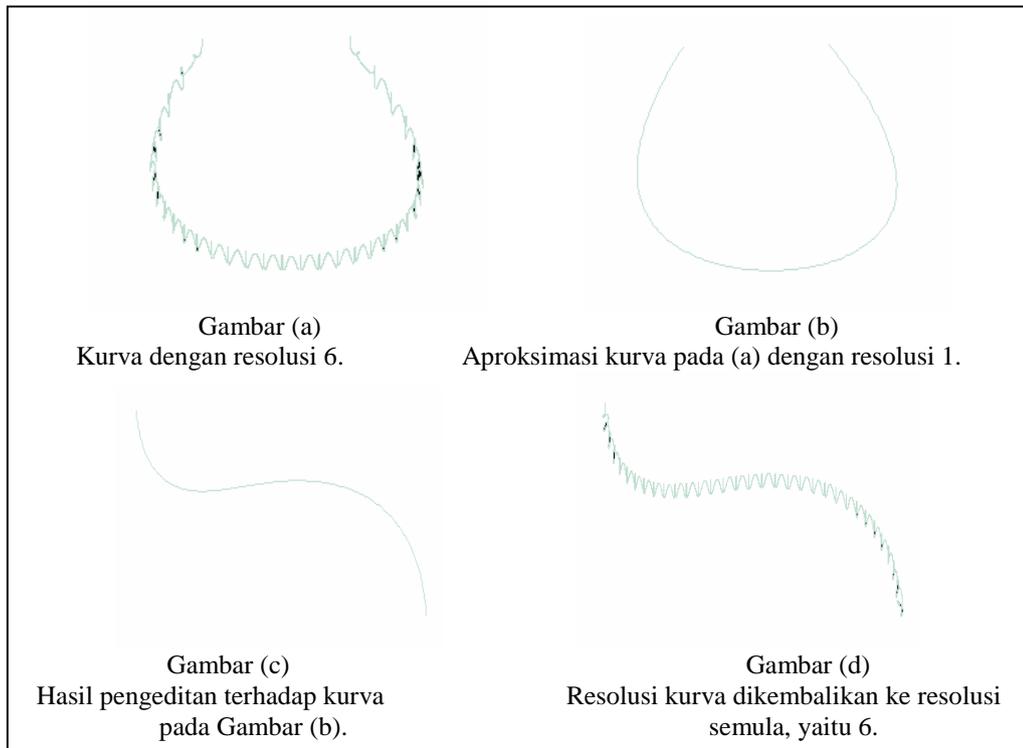
berubah, tetapi detail-detail halus dari kurva tetap dipertahankan. Titik kontrol pada resolusi n akan berubah menjadi $\bar{C}^n = C^n + \Delta C^n$. Nilai \bar{C}^n dapat



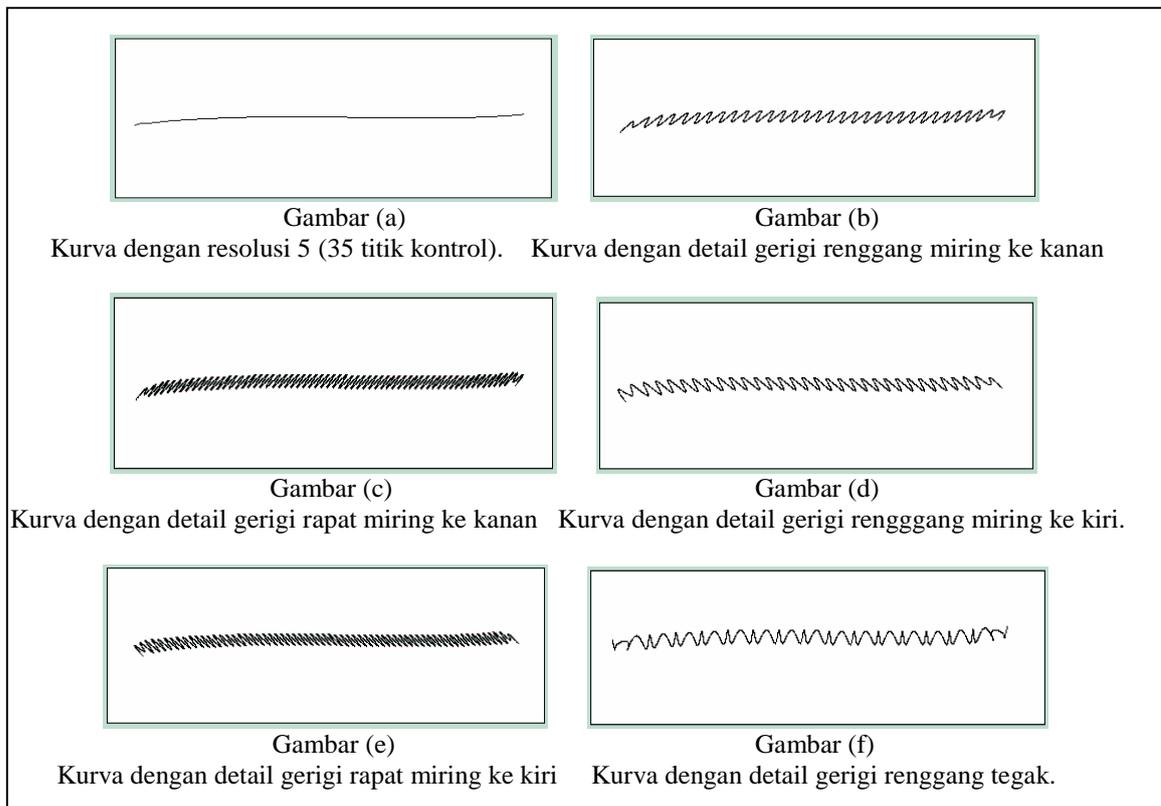
Gambar 2. Contoh penghalusan kurva.



Gambar 3. Contoh pengeditan satu bagian tertentu dari kurva



Gambar 4. Contoh pengeditan bentuk keseluruhan kurva



Gambar 5. Contoh-contoh pengeditan detil kurva

dihitung menggunakan algoritma rekonstruksi sebagai berikut [FIN96] :

$$\begin{aligned}\bar{C}^n &= C^n + \Delta C^n \\ &= C^n + P^n P^{n-1} \dots P^{j+1} \Delta C^j.\end{aligned}$$

Selanjutnya kurva pada resolusi n , dihitung dengan :

$$f^n(u) = \Phi^n(u) \bar{C}^n.$$

Beberapa contoh pengeditan bentuk keseluruhan kurva bisa dilihat di gambar 4.

2.5.3 Pengeditan Detail-Detail Kurva

Subbab ini membahas tentang manipulasi terhadap representasi multiresolusi kurva sehingga memungkinkan perubahan detail-detail kurva tanpa mempengaruhi bentuk keseluruhannya. Misalnya, suatu kurva $f^n(u)$ pada resolusi n dengan titik kontrol C^n memiliki representasi multiresolusi yang terdiri dari deretan C^0, C^1, \dots, C^{n-1} dan deretan D^0, D^1, \dots, D^{n-1} . Pengeditan detail-detail kurva dapat dilakukan dengan menaikkan resolusi kurva menjadi resolusi s , dimana $s > n$. Selanjutnya deretan $D^n, D^{n+1}, \dots, D^{s-1}$ yang semula bernilai 0, diisi dengan nilai-nilai tertentu sesuai dengan jenis karakter kurva yang diinginkan. Pengisian nilai pada deretan $D^n, D^{n+1}, \dots, D^{s-1}$ inilah yang memungkinkan perubahan detail-detail kurva tanpa mempengaruhi bentuk kurva secara keseluruhan. Pengamatan terhadap hubungan antara nilai-nilai dalam deretan $D^n, D^{n+1}, \dots, D^{s-1}$ dengan bentuk kurva memungkinkan penyusunan pustaka detail untuk kurva. Nilai \bar{C}^s yang baru bisa dihitung melalui proses rekonstruksi mulai dari resolusi n .

Selanjutnya kurva pada resolusi s , dihitung dengan :

$$f^s(u) = \Phi^s(u) \bar{C}^s.$$

Beberapa contoh pengeditan detail-detail kurva bisa dilihat di gambar 5.

3. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1 Kesimpulan

- Representasi multiresolusi dari kurva *B-spline* kubik yang menginterpolasi titik-titik ujung dengan basis wavelets memberikan dukungan yang sangat baik terhadap 4 tipe pengeditan seperti yang telah disebutkan di 1.1.
- Algoritma rekonstruksi dan dekomposisi wavelets yang melakukan perhitungan menggunakan filter sintesis P^j dan Q^j memiliki kompleksitas $O(m)$, dengan m adalah jumlah titik kontrol pada resolusi j dengan $m = 2^j + 3$, sebab struktur matriks P^j

dan Q^j bersifat *sparse*/jarang sehingga elemen-elemennya banyak yang berisi 0.

- Dari hasil uji coba menggunakan ratusan titik kontrol, algoritma berjalan cukup cepat dan memadai berkaitan dengan tuntutan komunikasi interaktif antara *user* dan program.
- Dari segi kebutuhan memori penyimpanan, representasi multiresolusi cukup efisien karena tidak membutuhkan memori penyimpanan ekstra selain dari yang digunakan untuk menyimpan titik kontrol.
- Pada jenis pengeditan satu bagian tertentu dari kurva melalui manipulasi secara langsung terhadap titik-titik kontrolnya, jika pengeditan dilakukan pada tingkat resolusi yang semakin rendah, maka bagian dari kurva yang berubah akan semakin besar. Misalnya, pemindahan satu titik kontrol pada kurva dengan resolusi 0 akan menyebabkan perubahan pada seluruh bentuk kurva, sedangkan pemindahan satu titik kontrol pada kurva dengan resolusi 5 akan menyebabkan perubahan pada satu bagian kecil dari kurva.
- Pengamatan lebih jauh terhadap hubungan antara bentuk kurva dengan deretan koefisien detail dari representasi multiresolusi, memungkinkan bertambahnya jumlah jenis karakter kurva yang bisa dimasukkan ke dalam pustaka detail.
- Agar dapat melakukan tipe pengeditan kurva seperti yang disebutkan pada poin a, kurva yang akan diedit harus memiliki titik kontrol berjumlah $2^j + 3$, dengan j menyatakan resolusi kurva dan bernilai integer positif. Hal ini merupakan keterbatasan dari representasi multiresolusi.

3.2 Saran

- Untuk mengatasi keterbatasan yang disebutkan pada poin g, perlu dilakukan pra-pemrosesan terhadap kurva (khususnya kurva yang tidak memiliki jumlah titik kontrol $2^j + 3$) sebelum dilakukan penyusunan representasi multiresolusi. Pra-pemrosesan ini memanipulasi titik kontrol sedemikian rupa sehingga didapatkan bentuk kurva yang sama tetapi dinyatakan menggunakan $2^j + 3$ titik kontrol. Pra-pemrosesan bisa dilakukan menggunakan metode penyisipan *knot* dengan deretan *knot* yang jaraknya tidak seragam/sama (*non-uniform knot sequence*).
- Pada penelitian ini, penyusunan representasi multiresolusi untuk kurva hanya dilakukan berkaitan dengan penyusunan representasi titik kontrol secara hirarkhis. Penelitian ini bisa dikembangkan dengan penambahan sifat-sifat lain dari kurva seperti warna, ketebalan dan tekstur.

- c. Hasil-hasil memuaskan yang didapat dari representasi multiresolusi untuk kurva ini bisa diperluas pada representasi multiresolusi untuk permukaan.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [BAR87] Bartels, R. H., Beatty, J. C., dan Barsky, B. A. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Morgan Kaufman Publishers. 1987.
- [CHU92] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press. 1992.
- [DAU92] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. 1992.
- [FAR90] Farin, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press. 1990.
- [FIN96] Finkelstein, A dan Salesin, D. H. *Multiresolution Curves*. Computer Graphics Proceedings. SIGGRAPH '96. 1996.
- [FOL90] Foley, J., Van Dam, A., Feiner, S., dan Hughes, J. *Computer Graphics Principles and Practice*. Addison Wesley. 1990.
- [FOR88] Forsey, D. R. dan Bartels, R. H. *Refinement Hierarchical B-Spline*. Computer Graphics, Vol. 22, No. 4, ACM Press, halaman 205 - 212. Agustus 1988.
- [MAL89] Mallat, S. G. *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*. IEEE Transaction On Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, hal. 674-693, Juli 1989.
- [SCH95] Schroder, P. *Wavelets in Computer Graphics*. Proceedings of the IEEE, Vol. 84, No. 4, halaman 615 - 625. April 1996.